ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

В.Н. В е л и ч к и н

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ТРИ-ТКАНЯХ НА V_2 в E_3

1. В работе [4] указан способ получения на поверхности V_2 в евклидовом пространстве E_3 связности Вейля с помощью задания 3-ткани векторными полями

$$\underset{\alpha}{X} = \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (\alpha = 1,2,3;\ i = 1,2), \tag{1}$$

направленными вдоль семейств ее линий. При этом всюду используется нормировка

$$\sum_\alpha \underset{\alpha}{X} = 0. \tag{2}$$

Отсюда проследует, что

$$\sum_\alpha \xi^i_\alpha = 0. \tag{3}$$

Основной тензор g_{ij} указанной связности Вейля определяется так:

$$g_{ij} = \sum_\alpha \tilde{\xi}^\alpha_i \tilde{\xi}^\alpha_j, \tag{4}$$

где каждая пара форм

$$\omega^\alpha = \tilde{\xi}^\alpha_i du^i \tag{5}$$

образует корепер, взаимный реперу из пары векторных полей (1).

Из (2) и (3) получим

$$\sum_\alpha \omega^\alpha = 0 \Longrightarrow \sum_\alpha \tilde{\xi}^\alpha_i = 0. \tag{6}$$

Координаты дополнительного ковектора

$$\Theta = v_i du^i \tag{7}$$

вычисляются по формуле

$$v_i = \frac{1}{2} g^{ks} \sum_\alpha (\partial_i \tilde{\xi}^\alpha_s - \partial_s \tilde{\xi}^\alpha_i) \tilde{\xi}^\alpha_k \tag{8}$$

(суммирование по всем k и s).

2. Будем требовать, чтобы связность Вейля с основным тензором (4) и дополнительным ковектором (7) совпадала с римановой связностью, индуцируемой на поверхности V_2 метрической

нормалью. При этом будем требовать, чтобы тензор (4) удовлетворял условию

$$g_{ij}=\delta_{ij}\,, \tag{9}$$

которое означает совпадение его с метрическим тензором поверхности V_2, отнесенной к сети линий кривизны.

Можно показать, что условие (9) само по себе еще не дает требуемого совпадения связностей.

Т е о р е м а . Связность Вейля, удовлетворяющая условию (9), индуцируемая на поверхности $V_2 \subset E_3$ 3-тканью, тогда и только тогда совпадает с римановой связностью, индуцируемой на поверхности метрической нормалью, когда заданная 3-ткань шестиугольна.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть связность Вейля совпадает с римановой связностью. Тогда из условия

$$\theta = d\varphi \tag{10}$$

в силу (7),(8),(9) получим следующую систему уравнений, соответствующую дифференциальному уравнению (10) в полных дифференциалах:

$$\partial_1\tilde{\xi}^1_2-\partial_2\tilde{\xi}^1_1=0;\ \partial_1\tilde{\xi}^2_2-\partial_2\tilde{\xi}^2_1=0. \tag{11}$$

Дифференцируя внешним образом (5), приведем систему (11) к виду:

$$\mathcal{D}\omega^1=0\,,\quad \mathcal{D}\omega^2=0\,. \tag{12}$$

Учитывая (6), замечаем, что у 3-ткани, соответствующей рассматриваемому совпадению связностей, все формы Пфаффа замкнуты.

Форма связности γ 3-ткани, [1]

$$\gamma = h_2\,\omega^1 - h_2\,\omega^2,$$

где скалярные множители h_1 , h_2 определяются из уравнений

$$\mathcal{D}\omega^1=h_1\Omega\,,\ \mathcal{D}\omega^2=h_2\Omega\,,$$

обратится в нуль, а потому и кривизна ткани k [1], определяемая из условия

$$d\gamma = k\Omega\,,$$

($\Omega=\omega^1\wedge\omega^2$ — поверхностный элемент 3-ткани) будет нулем, и заданная 3-ткань шестиугольна.

Обратно, пусть ткань шестиугольна. Тогда с помощью перенормирования ее форм Пфаффа ω^α форму связности γ можно привести к нулю:

$$h_2\,\omega^1=h_1\,\omega^2. \tag{13}$$

Умножая внешне обе части (13) на ω^1 и ω^2, получим систему (12), которая являлась необходимым и достаточным условием совпадения двух связностей при условии (9). Теорема доказана.

Отметим, что эту теорему можно считать обобщением теоремы, указанной в [3].

3. Возьмем первых два векторных поля (1) ортонормированными, направленными по линиям кривизны поверхности V_2. Тогда, учитывая требование (3), будем иметь следующие координаты векторных полей (1):

$$\xi^1_1=1,\ \xi^2_1=0;\ \xi^1_2=0,\ \xi^2_2=1;\ \xi^1_3=-1,\ \xi^2_3=-1,$$

то есть третье семейство будет биссекторным.

Легко проверить, что тогда вейлева связность, индуцируемая на поверхности 3-тканью, в силу доказанной теоремы будет совпадать с римановой связностью, индуцируемой на поверхности метрической нормалью (ср. [3]).

4. Выберем теперь в качестве направляющих векторов двух семейств 3-ткани единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, направленные вдоль линий кривизны поверхности V_2. Третье семейство определим вектором

$$\vec{e}=\vec{e}_1+\lambda\vec{e}_2\,, \tag{14}$$

где λ дифференцируемая функция двух аргументов.

Подберем векторы $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ так, чтобы выполнялась нормировка (1). Нетрудно видеть, что

$$\vec{e}\,'_1=-\vec{e}_1\,,\ \vec{e}\,'_2=-\lambda\vec{e}_2\,.$$

С помощью вектора $\vec{e}_3$ (метрической нормали) построим риманову связность $\overset{\circ}{\nabla}$ с метрическим тензором

Имеем:

$$\gamma_{11}=1\,,\ \gamma_{12}=0\,,\ \gamma_{22}=\lambda^2. \tag{15}$$

Коэффициенты $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ этой связности вычисляются по формуле

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{jt}=\frac{1}{2}\gamma^{ki}\left(\partial_t\gamma_{ij}+\partial_j\gamma_{it}-\partial_i\gamma_{jt}\right)$$

(см. [2]) и имеют вид:

$$\begin{aligned}&\overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{11}=0,\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{12}=0,\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{22}=-\lambda\partial_1\lambda;\\ &\overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{11}=0,\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{12}=\frac{\partial_1\lambda}{\lambda},\ \ \overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{22}=\frac{\partial_2\lambda}{\lambda}.\end{aligned} \tag{16}$$

Ткань, семейства которой направлены вдоль векторных полей $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}'$, имеет формы Пфаффа

$$\omega^1=\{-1,0\},\ \omega^2=\{0,-\frac{1}{\lambda}\},\ \omega^3=\{1,\frac{1}{\lambda}\}. \tag{17}$$

По формуле (4) находим координаты основного тензора связности Вейля ∇, порожденной этой 3-тканью:

$$g_{11}=2;\ g_{12}=\frac{1}{\lambda},\ g_{22}=\frac{2}{\lambda^2}. \tag{18}$$

Подставляя (17), (18) в (8), находим:

$$v_1=0,\ v_2=0,$$

то есть связность ∇ оказывается римановой.

Коэффициенты Γ_{ij}^k этой связности вычисляются по формуле

$$\Gamma_{jt}^h=\frac{1}{2}g^{hi}(\partial_t g_{ij}+\partial_j g_{it}-\partial_i g_{jt})$$

(см. [2]) и имеют вид:

$$\Gamma_{11}^1=\frac{\partial_1\lambda}{3\lambda},\ \Gamma_{12}^1=\frac{2\partial_1\lambda}{3\lambda^2},\ \Gamma_{22}^1=\frac{4\partial_1\lambda}{3\lambda^3};$$

$$\Gamma_{11}^2=-\frac{\partial_1\lambda}{6},\ \Gamma_{12}^2=-\frac{\partial_1\lambda}{3\lambda},\ \Gamma_{22}^2=-\frac{2\partial_1\lambda}{3\lambda^2}. \tag{19}$$

5. Рассмотрим тензор T_{jk}^i аффинной деформации [2] связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$:

$$T_{jk}^i=\Gamma_{jk}^i-\overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^i. \tag{20}$$

а) Можно показать, что римановы связности ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$ совпадают лишь при условии $\lambda=\mathrm{Const}$.

б) Так как необходимым и достаточным условием конформного соответствия связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$ является отличие их основных тензоров (18) и (15) только скалярным множителем [2], то заключаем, что никаким выбором λ нельзя достичь конформного соответствия связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$.

в) Тензор деформации, соответствующий проективному (геодезическому) отображению связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$, имеет вид:

$$T_{jk}^i=\delta_j^i p_k+\delta_k^i p_j,$$

где

$$p_1=\frac{1}{3}(T_{11}^1+T_{21}^2),\ p_2=\frac{1}{3}(T_{12}^1+T_{22}^2)$$

(см. [2]).

Из формул (20), (19), (16) следует, что проективное отображение связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$ возможно лишь при $\lambda=\mathrm{Const}$. (см. случай а)).

6. Вопрос о шестиугольности 3-ткани, порожденной векторными полями $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}'$, можно исследовать с помощью выше доказанной теоремы, что приводит к условию $\lambda=\lambda(u^2)$. Это есть необходимое и достаточное условие шестиугольности такой ткани. Ему, в частности, удовлетворяет ткань, отвечающая совпадению связностей ∇ и $\overset{\circ}{\nabla}$.

Список литературы

I. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. М. ГИФМЛ, I959.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М-Л, ГИТТЛ, I950.

3. Хачатрян А.Е. Сб. асп. работ. Мат. КГУ, Вып. 2, I97I, с. I35-I47.

4. Шуликовский В.И. "Научни трудови на висши педагогический ин-т. Мат". Пловдив"., I966, т. IУ, кн. I, с. I3-22.